Distributietheorie 14-6-'99. 9.00-12.00

Tentamenopgave[1]

I

Beschouw de differentiaaloperator $D = (\frac{d}{dx})^2 - 2\frac{d}{dx} + 1$.

1. Bepaal de fundamentele oplossing van D behorend tot $\mathcal{D}'_+ = \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : \mathrm{dr}(T) \subset [0, +\infty)\}$.

2. Bepaal de oplossing $T \in \mathcal{D}'_+$ van de vergelijking $DT = Y$ (Y de Heaviside één-stap functie). Aanwijzing: gebruik convolutie en/of symboolrekening.

3. Bepaal, met behulp van de Heaviside symboolrekening, de oplossing f van het volgende klassieke beginwaardeprobleem, waar g een gegeven op $\mathbb{R}$ gedefinieerde continue functie is:

(1) $$Df = g, \; f(0) = 0, \; f'(0) = 1.$$

4. Wat is de oplossing f als $g = 1$?

5. Zij G een functie van de klasse C^2 on $\mathbb{R}$. Onder welke voorwaarden op G bestaat er een continue functie f op $\mathbb{R}$ die voldoet aan de volgende convolutievergelijking? Bepaal in dat geval de oplossing f.

(2) $$\int_0^x f(x-y)ye^y dy = G(x) \qquad x \geq 0$$

II

Notaties: $\mathbb{R}_* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $E = \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : T_{|\mathbb{R}_*} = \frac{1}{x}\}$.

1. Geef de definitie van de distributie $\mathrm{hw}\frac{1}{x}$ en toon aan dat deze tot E behoort.

2. Bepaal alle distributies $T \in E$. Aanwijzing: De verzameling $E_0 = \{S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : S_{|\mathbb{R}_*} = 0\}$ is bekend.

3. Toon aan dat er precies één distributie $T \in E$ bestaat die homogeen is van de graad -1 en oneven.

III

Laat T en T_ε getemperde distributies zijn, $\varepsilon > 0$. Men stelt per definitie $T = \lim_{\varepsilon \to 0} T_\varepsilon$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ als $< T, \varphi > = \lim_{\varepsilon \to 0} < T_\varepsilon, \varphi >$ voor alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

1. Toon aan dat dit voor de Fouriertransformatie $\mathcal{F}$ tot gevolg heeft $\mathcal{F}(T) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{F}(T_\varepsilon)$.

2. Zij T_ε de reguliere distributie $Y(x)e^{-\varepsilon x}$. Toon aan dat $\lim_{\varepsilon \to 0} T_\varepsilon = Y$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

3. Bepaal met behulp hiervan de Fouriergetransformeerde van Y.

[1] De delen I, II and III zijn onafhankelijk. Noem ter verheldering van de antwoorden de gebruikte stellingen.